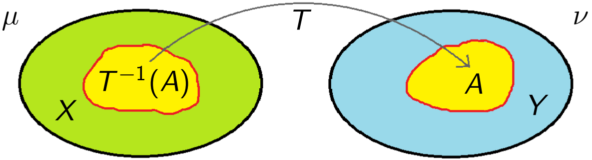
Teoria Miary i Całki

Bartosz Kwaśniewski

Wykład 12

Zamiana zmiennych w całce i przechodzenie z granicą pod całkę

Niech $(X, \mathcal{F}_X, \mu)$ i $(Y, \mathcal{F}_Y, \nu)$ przestrzenie z miarą i niech $T : X \to Y$ odwozorowanie mierzalne.



Obrazem miary μ jest miara $T(\mu)$ na $\mathcal{F}_Y$, gdzie $T(\mu)(A) = \mu(T^{-1}(A))$.

Tw. (abstrakcyjna zamiana zmiennych)

Funkcja f jest $T(\mu)$-całkowalna $\iff$ $f \circ T$ jest μ-całkowalna. Ponadto

$$\forall_{f \in \mathcal{L}(T(\mu))} \qquad \int_Y f\, dT(\mu) = \int_X f \circ T\, d\mu.$$

Często pisze się $\mu \circ T^{-1} := T(\mu)$

Dowód: (1) Jeśli $f \geqslant 0$ prosta, to $f = \sum_{i=1}^n y_i \mathbb{1}_{A_i}$, $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{F}_Y$, i

$$\int_Y f\, dT(\mu) = \sum_{i=1}^n y_i T(\mu)(A_i) = \sum_{i=1}^n y_i \mu(T^{-1}(A_i)) = \int_X \sum_{i=1}^n y_i \mathbb{1}_{T^{-1}(A_i)} d\mu$$

$$\boxed{\mathbb{1}_A \circ T = \mathbb{1}_{T^{-1}(A)}} = \int_X \left(\sum_{i=1}^n y_i \mathbb{1}_{A_i} \right) \circ T\, d\mu = \int_X f \circ T\, d\mu.$$

(2) Jeżeli $f \geqslant 0$ mierzalna, to istnieją funkcje proste $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{F})$ takie, że $0 \leqslant f_n \nearrow f$ i wtedy także $f_n \circ T \nearrow f \circ T$. Stąd

$$\int_Y f\, dT(\mu) \overset{Levi}{=} \lim_{n\to\infty} \int_Y f_n\, T(\mu) \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \circ T\, d\mu$$
$$\overset{Levi}{=} \int_X f \circ T\, d\mu.$$

(3) Jeżeli $f : Y \to \mathbb{R}$ dowolna mierzalna, to

$$f \in \mathcal{L}(T(\mu)) \iff \int_Y |f|\, dT(\mu) < \infty \overset{(2)}{\iff} \int_X |f| \circ T\, d\mu < \infty$$
$$\iff \int_X |f \circ T|\, d\mu < \infty \iff f \circ T \in \mathcal{L}(\mu).$$

Jeśli to zachodzi, to

$$\int_Y f\, dT(\mu) = \int_Y f^+\, dT(\mu) - \int_Y f^-\, dT(\mu)$$
$$\overset{(2)}{=} \int_X f^+ \circ T\, d\mu - \int_X f^- \circ T\, d\mu$$
$$= \int_X (f \circ T)^+\, d\mu - \int_X (f \circ T)^-\, d\mu$$
$$= \int_X f \circ T\, d\mu. \qquad \blacksquare$$

Wn1. Jeśli $T(\mu) \ll \nu$ oraz ν jest σ-skonczona, to dla $f : Y \to \mathbb{R}$

$$\int_X f \circ T \, d\mu = \int_Y f \, \frac{dT(\mu)}{d\nu} \, d\nu,$$

gdzie z istnienia jednej całki wynika istnienie drugiej.

Dowód: $\int_X f \circ T \, d\mu \overset{\textbf{Tw}}{=} \int_Y f \, dT(\mu) \overset{\textbf{Stw}\ \text{Wyk.11}}{=} \int_Y f \, \frac{dT(\mu)}{d\nu} \, d\nu.$ ∎

Wn2. Jeśli T odwracalne, $T^{-1} : Y \to X$ mierzalne, $T^{-1}(\nu) \ll \mu$ oraz μ jest σ-skonczona, to dla dowolnej mierzalnej $f : Y \to \mathbb{R}$

$$\int_Y f \, d\nu = \int_X (f \circ T) \cdot \frac{dT^{-1}(\nu)}{d\mu} \, d\mu$$

gdzie z istnienia jednej całki wynika istnienie drugiej.

Dowód: Stosujemy **Tw.** do miary $T^{-1}(\nu)$:

$$\int_Y f \, d\nu = \int_Y f \, dT(T^{-1}(\nu)) \overset{\textbf{Tw}}{=} \int_X (f \circ T) \, dT^{-1}(\nu)$$

$$\overset{\textbf{Stw}\ \text{Wyk.11}}{=} \int_X (f \circ T) \cdot \frac{dT^{-1}(\nu)}{d\mu} \, d\mu.$$ ∎

Wn3. Jeśli $g : [a, b] \to [c, d]$ różniczkowalna bijekcja, to

$$\int_c^d f(y)\,dy = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx$$

dla każdej funkcji $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ całkowalnej w sensie Lebesgue'a.

Dowód: Załóżmy, że g rosnąca. Traktując g jako 'dystrybuantę' otrzymujemy miarę Lebesgue'a-Stieltjesa λ_g na $[a, b]$; wyznaczoną przez warunek $\lambda_g([x, y)) = g(y) - g(x)$. Ponadto $g^{-1}(\lambda) = \lambda_g$, gdyż

$$\begin{aligned} g^{-1}(\lambda)([x, y)) &= \lambda\big(g([x, y))\big) = \lambda\big([g(x), g(y))\big) \\ &= g(y) - g(x) = \lambda_g([x, y)). \end{aligned}$$

Skoro g różniczkowalna, to $\lambda_g \ll \lambda$ na $[a, b]$ oraz $\frac{d\lambda_g}{d\lambda} = g'$. Stąd

$$\begin{aligned} \int_c^d f(y)\,dy = \int_c^d f(y)\,d\lambda &\overset{\textbf{Wn2}}{=} \int_a^b f(g(x)) \cdot \frac{dg^{-1}(\lambda)}{d\lambda}(x)\,d\lambda \\ &= \int_a^b f(g(x)) \cdot \frac{d\lambda_g}{d\lambda}(x)\,d\lambda = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,d\lambda. \end{aligned}$$

■

Uw. $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ niemalejąca, lewostronnie ciągła $\Longrightarrow \lambda_F = F^{-1}(\lambda)$ gdzie $F^{-1}(y) := \inf\{x \in \mathbb{R} : y \leqslant F(x)\}$ **funkcja kwantylowa**

Wn4. Jeśli $g : U \to V$ dyfeomorfizm, gdzie $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ zbiory otwarte, to dla każdej λ^n-całkowalnej funkcji $f : V \to \mathbb{R}$

$$\int_V f(y)\,dy = \int_U f(g(x))|\det(J_g)(x)|\,dx$$

gdzie $x, y \in \mathbb{R}^n$ wektory i $J_g = [\frac{\partial g_i}{\partial x_j}]_{i,j=1}^n$ **macierz Jacobiego** funkcji g.

Dowód dla odwzorowania liniowego: Jeśli g jest odwzorowaniem liniowym, to ma stałą pochodną. Mianowicie $g'(x) = g$, dla $x \in U$, czyli możemy utożsamić g z macierzą J_g. Na mocy **Tw** z Wykładu 7

$$g^{-1}(\lambda^n) = |\det(g)|\lambda^n = |\det(J_g)|\lambda^n$$

(g^{-1} istnieje i jest liniowe, bo g liniowe odwracalne). Stąd

$$\int_V f(y)\,dy = \int_V f(y)\,d\lambda^n \overset{\textbf{Wn2}}{=} \int_U f(g(x)) \cdot \frac{dg^{-1}(\lambda^n)}{d\lambda^n}(x)\,d\lambda^n$$

$$= \int_U f(g(x)) \cdot \frac{d|\det(J_g)|\lambda^n}{d\lambda^n}(x)\,d\lambda^n = \int_a f(g(x)) \cdot |\det(J_g)|\,d\lambda^n.$$

Dla dowolnego (niekoniecznie liniowego) g wykorzystać, że $g(x)$ lokalnie działa jak odwzorowanie liniowe $J_g(x)$! $\square$

„pochodna w punkcie x, to najlepsze liniowe przybliżenie w x"

Prz. (współrzędne biegunowe) Rozważmy dyfeomorfizm $g : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \to \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$ dany wzorem

$$g(r, \varphi) = (r \cos\varphi, r \sin\varphi).$$

Wtedy $J_g = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix}$ oraz $\det(J_g) = r$. Zatem z **Wn4**, dla dowolnej funkcji całkowalnej $f : V \to \mathbb{R}$, $V \subseteq \mathbb{R}^2$, mamy

$$\int_V f(x, y)\, dx\, dy = \int_{g^{-1}(V)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, dr\, d\varphi$$

Prz. Niech $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ zmienna losowa na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Rozkład zmiennej ξ to obraz $\xi(P)$ miary P na $\mathbb{R}$. Zmienna ξ ma rozkład ciągły $\iff \xi(P) \ll \lambda$. Wtedy $f := \frac{d\xi(P)}{d\lambda}$ jest gęstością rozkładu zmiennej ξ. Dla dowolnej funkcji borelowskiej $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takiej, że $h(\xi)$ ma wartość oczekiwaną

$$\mathbb{E}(h(\xi)) = \int_\Omega h(\xi)\, dP \overset{\textbf{Wn1}}{=} \int_{\mathbb{R}} h(x) f(x) dx.$$